Appunti Teorici di Matematica

Federico Zotti

18/12/2022

Contents

1 Funzioni

1.1 Funzioni reali di variabile reale

Dati due sottoinsiemi A e B (non vuoti) di $\mathbb{R}$, una funzione f da A a B è una relazione che associa a ogni numero reale di A *uno e un solo* numero reale di B.

$$f : A \to B$$

1.2 Dominio naturale (campo di esistenza)

Il dominio naturale della funzione $y = f(x)$ è l'insieme più ampio dei valori reali che si possono assegnare alla variabile indipendente x affinché esista un corrispondente valore reale y.

1.3 Proprietà delle funzioni

Una funzione da A a B è:

- **Iniettiva** se ogni elemento di B è immagine di al più un elemento di A;
- **Suriettiva** se ogni elemento di B è immagine di almeno un elemento di A;
- **Biunivoca** se è sia iniettiva che suriettiva.

1.4 Funzione crescente

- $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ è una funzione **crescente** se in un intervallo $I \subseteq D$ se scelti $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) \leq f(x_2)$.
- $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ è una funzione **strettamente crescente** se in un intervallo $I \subseteq D$ se scelti $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) < f(x_2)$.

1.5 Funzione decrescente

- $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ è una funzione **crescente** se in un intervallo $I \subseteq D$ se scelti $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) \geq f(x_2)$.
- $y = f(x)$ di dominio $D \subseteq \mathbb{R}$ è una funzione **strettamente crescente** se in un intervallo $I \subseteq D$ se scelti $x_1, x_2 \in I$ con $x_1 < x_2$ risulta $f(x_1) > f(x_2)$.

1.6 Funzione peridodica

$y = f(x)$ è una funzione **periodica** di periodo T, con $T > 0$ se per qualsiasi numero k intero si ha:

$$f(x) = f(x + kT)$$

1.7 Funzione pari

$D \subseteq \mathbb{R}$ tale che, se $x \in D$, allora $-x \in D$.

$y = f(x)$ è una funzione **pari** in D se $\forall x \in D$:

$$f(-x) = f(x)$$

1.8 Funzione dispari

$D \subseteq \mathbb{R}$ tale che, se $x \in D$, allora $-x \in D$.

$y = f(x)$ è una funzione **dispari** in D se $\forall x \in D$:

$$f(-x) = -f(x)$$

2 Limiti

2.1 Intorno di un punto

Dato un numero reale x_0, un **intorno completo** di x_0 è un qualunque intervallo aperto $I(x_0)$ contenente x_0 (δ_1 e δ_2 numeri reali positivi):

$$I(x_0) =]x_0 - \delta_1; x_0 + \delta_2[$$

2.2 Intorno circolare

Dato un numero reale x_0 e un numero reale positivo δ, un **intorno circolare** di x_0, di raggio δ è l'intervallo aperto $I_\delta(x_0)$ di centro x_0 e raggio δ:

$$I_\delta(x_0) =]x_0 - \delta; x_0 + \delta[$$

2.3 Punto di accumulazione

Il numero reale x_0 è un **punto di accumulazione** di $A \subseteq \mathbb{R}$ se ogni intorno completo di x_0 contiene infiniti punti di A.

2.4 $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$

La funzione $f(x)$ ha per limite il numero reale ℓ, per x che tende a x_0, quando, comunque si scelga un numero reale positivo ϵ, si può determinare un intorno completo $I(x_0)$ tale che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists I(x_0) :$$

$$|f(x) - \ell| < \epsilon,$$

$$\forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

2.5 Funzione continua

Siano $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a; b]$ e x_0 un punto interno all'intervallo. La funzione $f(x)$ è **continua nel punto** x_0 quando esiste il limite di $f(x)$ per $x \to x_0$ e tale limite è uguale al valore $f(x_0)$ della funzione calcolata in x_0:

$$\forall x_0 \in [a; b] \to \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

2.6 Limite per eccesso

Diciamo che $f(x)$ tende a ℓ **per eccesso** e scriviamo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^+$$

se $f(x)$ è una funzione con limite finito ℓ per x che tende a x_0 e assume sempre valori *maggiori* di ℓ in un intorno di x_0 con al più $x \neq x_0$.

2.7 Limite per difetto

Diciamo che $f(x)$ tende a ℓ **per difetto** e scriviamo:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^-$$

se $f(x)$ è una funzione con limite finito ℓ per x che tende a x_0 e assume sempre valori *minori* di ℓ in un intorno di x_0 con al più $x \neq x_0$.

2.8 $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$

Se $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a; b]$ e non definita in $x_0 \in [a; b]$. $f(x)$ tende a $+\infty$ per x che tende a x_0 quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo $I(x_0)$ tale che:

$$\forall M > 0 \exists I(x_0):$$

$$f(x) > M,$$

$$\forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

2.9 $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$

Se $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a; b]$ e non definita in $x_0 \in [a; b]$. $f(x)$ tende a $-\infty$ per x che tende a x_0 quando per ogni numero reale positivo M si può determinare un intorno completo $I(x_0)$ tale che:

$$\forall M > 0 \exists I(x_0):$$

$$f(x) < -M,$$

$$\forall x \in I(x_0), x \neq x_0$$

2.10 Asintoto verticale

Data la funzione $y = f(x)$, se si verifica che:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \pm\infty$$

la retta $x = c$ è **asintoto verticale** per il grafico della funzione.

2.11 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$

Una funzione $f(x)$, definita in un intervallo illimitato a destra, tende al numero reale ℓ per x che tende a $+\infty$ quando, per ogni $\epsilon > 0$ fissato, si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists c > 0 :$$

$$|f(x) - \ell| < \epsilon,$$
$$\forall x > c$$

2.12 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell$

Una funzione $f(x)$, definita in un intervallo illimitato a destra, tende al numero reale ℓ per x che tende a $-\infty$ quando, per ogni $\epsilon > 0$ fissato, si può determinare un intorno I di $-\infty$ tale che:

$$\forall \epsilon > 0 \exists c > 0 :$$

$$|f(x) - \ell| < \epsilon,$$
$$\forall x < -c$$

2.13 Asintoto orizzontale

Data la funzione $y = f(x)$, se si verifica una delle condizioni:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = q \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = q \qquad \lim_{x \to \infty} f(x) = q$$

la retta $y = q$ è **asintoto orizzontale** per il grafico della funzione.

2.14 $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

2.14.1 $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Una funzione $f(x)$, definita in un intervallo illimitato a destra, ha per limite $+\infty$ per x che tende a $+\infty$ quando, per ogni numero reale positivo M, si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che:

$$\forall M > 0 \exists c > 0 :$$

$$f(x) > M,$$
$$\forall x > c$$

2.14.2 $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

Una funzione $f(x)$, definita in un intervallo illimitato a sinistra, ha per limite $+\infty$ per x che tende a $-\infty$ quando, per ogni numero reale positivo M, si può determinare un intorno I di $-\infty$ tale che:

$$\forall M > 0 \exists c > 0 :$$

$$f(x) > M,$$
$$\forall x < -c$$

2.14.3 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Una funzione $f(x)$, definita in un intervallo illimitato a destra, ha per limite $-\infty$ per x che tende a $+\infty$ quando, per ogni numero reale positivo M, si può determinare un intorno I di $+\infty$ tale che:

$$\forall M > 0 \exists c > 0 :$$

$$f(x) < -M,$$
$$\forall x > c$$

2.14.4 $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Una funzione $f(x)$, definita in un intervallo illimitato a sinistra, ha per limite $-\infty$ per x che tende a $-\infty$ quando, per ogni numero reale positivo M, si può determinare un intorno I di $-\infty$ tale che:

$$\forall M > 0 \exists c > 0 :$$

$$f(x) < -M,$$
$$\forall x < -c$$

2.15 Teorema di unicità del limite

Se per $x \to x_0$ la funzione $f(x)$ ha per limite il numero reale ℓ allora tale limite è unico.

2.16 Teorema della permanenza del segno

Se il limite di una funzione per $x \to x_0$ è un numero ℓ diverso da 0, allora esiste un intorno $I(x_0)$ (escluso al più x_0) in cui $f(x)$ e ℓ sono entrambi positivi oppure entrambi negativi.

2.17 Teorema del confronto

Siano $h(x), f(x), g(x)$ tre funzioni definite in uno stesso intorno H di x_0, escluso al più il punto x_0. Se in ogni punto di H diverso da x_0 risulta:

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

e il limite delle due funzioni $h(x)$ e $g(x)$, per $x \to x_0$, è uno stesso numero ℓ, allora anche $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$.

$$\left.\begin{array}{l} h(x) \leq f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to x_0} h(x) = \ell \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell \end{array}\right\} \to \lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$$

2.18 Funzione continua

Una funzione definita in $[a;b]$ si dice **continua** nell'intervallo $[a;b]$ se è continua in ogni punto dell'intervallo.

2.19 Teorema di Weierstrass

se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume, in tale intervallo, il massimo assoluto e il minimo assoluto.

2.20 Teorema dei valori intermedi

Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$, allora essa assume, almeno una volta, tutti i valori compresi tra il massimo e il minimo.

2.21 Teorema di esistenza degli zeri

Se f è una funzione continua in un intervallo limitato e chiuso $[a; b]$ e negli estremi di tale intervallo assume valori di segno opposto, allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo, in cui f si annulla, ossia $f(c) = 0$.

2.22 Punti di discontinuità

2.22.1 Prima specie

Un punto x_0 si dice **punto di discontinuità di prima specie** per la funzione $f(x)$ quando, per $x \to x_0$, il limite destro e il limite sinistro di $f(x)$ sono entrambi finiti ma diversi fra loro:

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell_1 \neq \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell_2$$

La differenza $|\ell_2 - \ell_1|$ si dice **salto** della funzione.

2.22.2 Seconda specie

Un punto x_0 si dice **punto di discontinuità di seconda specie** per la funzione $f(x)$ quando per $x \to x_0$ almeno uno dei due limiti, destro o sinistro, di $f(x)$ è infinito oppure non esiste.

2.22.3 Terza specie

Un punto x_0 si dice **punto di discontinuità di terza specie** per la funzione $f(x)$ quando:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$$

2.23 Asintoto obliquo

La retta di equazione $y = mx+q$ con $m \neq 0$ è **asintoto obliquo** di una funzione $f(x)$ se:

$$\lim_{x \to x_0} [f(x) - (mx + q)] = 0$$

Per trovarlo:

$$m = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{x}$$

$$q = \lim_{x \to x_0} [f(x) - mx]$$

3 Derivate

3.1 Rapporto incrementale

Dati una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, e due numeri reali c e $c + h$ (con $h \neq 0$) interni all'intervallo, il **rapporto incrementale** di f nel punto c (o relativo a c) è il numero:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

3.2 Derivata di una funzione

Dati una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, la **derivata della funzione** nel punto c interno all'intervallo, che indichiamo con $f'(c)$, è il limite, se esiste ed è *finito* per $h \to 0$, del rapporto incrementale di f relativo a c:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c + h) - f(c)}{h}$$

La derivata di f nel punto c è il coefficiente angolare della retta tangente in c.

Una funzione è derivabile in un intervallo chiuso $[a; b]$ se è derivabile in tutti i punti interni dell'intervallo e se esistono e sono finite la derivata destra in a e la derivata sinistra in b.

Se una funzione è derivabile nel punto x_0, inquel punto la funzione è anche continua.

3.3 Retta tangente

Data la funzione $y = f(x)$, l'equazione della retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0; y_0)$, se tale retta esiste e non è parallela all'asse y, è:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

3.4 Punto stazionario

Dati la funzione $y = f(x)$ e un suo punto $x = c$, se $f'(c) = 0$, allora $x = c$ è un **punto stazionario** o un **punto a tangente orizzontale**.

3.5 Criterio di derivabilità

Se $f(x)$ è una funzione continua in $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$ tranne al più in $x_0 \in]a; b[$ e se:

$$\lim_{x \to x_0^-} f'(x) = \lim_{x \to x_0^+} f'(x) = \ell$$

allora la funzione è derivabile in x_0 e risulta:

$$f'(x) = \ell$$

3.6 Differenziale di una funzione

Il **differenziale** di una funzione $f(x)$, relativo al punto x e all'incremento Δx, è il prodotto della derivata della funzione, calcolata in x, per l'incremento Δx. Il differenziale viene indicato con $\mathrm{d}f(x)$ oppure $\mathrm{d}y$:

$$\mathrm{d}y = f'(x) \cdot \Delta x$$

3.7 Teorema di Lagrange

Se una funzione $f(x)$ è continua in un intervallo chiuso $[a; b]$ ed è derivabile in ogni punto interno a esso, esiste almeno un punto c interno ad $[a; b]$ per cui vale la relazione:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

3.7.1 Conseguenze

Se una funzione $f(x)$ è continua nell'intervallo $[a; b]$, derivabile in $]a; b[$ e tale che $f'(x)$ è nulla in ogni punto interno dell'intervallo, allora $f(x)$ è costante in tutto $[a; b]$.

Se $f(x)$ e $g(x)$ sono due funzioni continue nell'intervallo $[a; b]$, derivabili in $]a; b[$ e tali che $f'(x) = g'(x)\ \forall x \in]a; b[$, allora esse differiscono per una costante.

3.8 Teorema di Rolle

Se, per una funzione $f(x)$ continua nell'intervallo $[a; b]$ e derivabile nei punti interni di questo intervallo, si ha la condizione $f(a) = f(b)$, allora esiste almeno un punto c, interno all'intervallo, per il quale risulta:

$$f'(c) = 0$$

3.9 Teorema di Cauchy

Se le funzioni $f(x)$ e $g(x)$ sono continue nell'intervallo $[a; b]$, derivabili in ogni punto interno a questo intervallo e inoltre in $]a; b[$ è sempre $g'(x) \neq 0$, allora esiste almeno un punto c interno ad $[a; b]$ in cui si ha:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

cioè il rapporto fra gli incrementi delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$ nell'intervallo è uguale al rapporto fra le rispettive derivate calcolate in un particolare punto c all'interno dell'intervallo.

3.10 Teorema di De L'Hospital

Dati un intorno I di un punto c e due funzioni $f(x)$ e $g(x)$ definite in I (escluso al più c), se:

- $f(x)$ e $g(x)$ sono derivabili in I (escluso al più c), con $g'(x) \neq 0$;
- le due funzioni tendono entrambe a 0 o a $\pm\infty$ per $x \to c$;

- per $x \to c$ esiste il limite del rapporto $\frac{f'(x)}{g'(x)}$;

allora esiste anche il limite del rapporto delle funzioni ed è:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

3.11 Massimo

3.11.1 Assoluto

Data una funzione $y = f(x)$ il cui dominio è D, x_0 è il **punto di massimo assoluto** se:

$$f(x) \leq f(x_0) \forall x \in D$$

Il valore $f(x_0) = M$ è il **massimo assoluto** della funzione.

3.11.2 Relativo

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, x_0 è un **punto di massimo relativo** se esiste un intorno I di x_0 tale che:

$$f(x_0) \geq f(x) \forall x \in I(x_0)$$

Il valore $f(x_0)$ è detto **massimo relativo** della funzione in $[a; b]$.

3.12 Minimo

3.12.1 Assoluto

Data una funzione $y = f(x)$ il cui dominio è D, x_0 è il **punto di minimo assoluto** se:

$$f(x) \geq f(x_0) \forall x \in D$$

Il valore $f(x_0) = M$ è il **minimo assoluto** della funzione.

3.12.2 Relativo

Data una funzione $y = f(x)$, definita in un intervallo $[a; b]$, x_0 è un **punto di minimo relativo** se esiste un intorno I di x_0 tale che:

$$f(x_0) \leq f(x) \forall x \in I(x_0)$$

Il valore $f(x_0)$ è detto **minimo relativo** della funzione in $[a; b]$.

3.13 Concavità

3.13.1 Verso l'alto

Diciamo che in x_0 la funzione $f(x)$ ha la **concavità rivolta verso il semiasse positivo delle y (*verso l'alto*)** se esiste un intorno completo I di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno e diverso da x_0, la funzione assume valori maggiori di quelli di $t(x)$ nei punti aventi la stessa ascissa, ossia:

$$f(x) > t(x) \quad \forall x \in I \wedge x \neq x_0$$

3.13.2 Verso il basso

Diciamo che in x_0 la funzione $f(x)$ ha la **concavità rivolta verso il semiasse negativo delle** y **(*verso il basso*)** se esiste un intorno completo I di x_0 tale che, per ogni x appartenente all'intorno e diverso da x_0, la funzione assume valori minori di quelli di $t(x)$ nei punti aventi la stessa ascissa, ossia:

$$f(x) < t(x) \quad \forall x \in I \land x \neq x_0$$

4 Integrali indefiniti

4.1 Primitiva

Una funzione $F(x)$ è una **primitiva** della funzione $f(x)$ definita in un intervallo $[a;b]$ se $F(x)$ è derivabile in tutto $[a;b]$ e la sua derivata è $f(x)$:

$$F'(x) = f(x)$$

4.2 Integrale indefinito

L'**integrale indefinito** di una funzione $f(x)$ è l'insieme di tutte le primitive $F(x) + c$ di $f(x)$, con c numero reale qualunque.

Si indica con $\int f(x)\, dx$.

4.3 Condizione sufficiente di integrabilità

Se una funzione è continua in $[a;b]$, allora ammette primitive nello stesso intervallo.

4.4 Proprietà dell'integrale indefinito

4.4.1 Prima proprietà di linearità

L'integrale indefinito di una somma di funzioni integrabili è uguale alla somma degli integrali indefiniti delle singole funzioni:

$$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx + \int g(x)\, dx$$

4.4.2 Seconda proprietà di linearità

L'integrale del prodotto di una costante per una funzione integrabile è uguale al prodotto della costante per l'integrale della funzione:

$$\int k \cdot f(x)\, dx = k \cdot \int f(x)\, dx$$

4.5 Integrali indefiniti immediati

$$\int x^\alpha \, dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \qquad \text{con } \alpha \in \mathbb{R} \land \alpha \neq -1$$

$$\int e^x \, dx = e^x + c$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \, dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} \, dx = -\cot x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \arctan x + c$$

4.6 Integrazione per parti

$$\int f(x) \cdot g'(x) \, dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x) \, dx$$

5 Integrali definiti

5.1 Definizione di integrale definito

5.1.1 Trapezoide

Dati una funzione $y = f(x)$ e un intervallo chiuso e limitato $[a; b]$ nel quale la funzione è *continua e positiva* (o nulla), il **trapezoide** è la figura piana delimitata dall'asse x, dalle rette $x = a$ e $x = b$ e dal grafico di $f(x)$. Si tratta di un quadrilatero mistilineo di vertici:

- $A(a; 0)$
- $B(b; 0)$
- $C(b; f(b)$
- $D(a; f(a)$

Viene chiamato trapezoide perchè somiglia a un trapezio con le basi parallele all'asse y.

L'area S di un trapezoide non può essere calcolata in modo elementare, ma è possibile approssimarla per eccesso e per difetto.

Con $|b - a| \to 0$, le approssimazioni di S tendono allo stesso numero.

Sommando tutte le approssimazioni si ottiene l'integrale definito

5.1.2 Definizione

Data una funzione $f(x)$ continua in $[a;b]$, l'**integrale definito** esteso all'intervallo $[a;b]$ è il valore comune del limite per $n \to +\infty$ delle due successioni s_n per difetto e S_n per eccesso.

5.2 Calcolo dell'integrale definito

Data una funzione $f(x)$ continua in $[a;b]$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = [\varphi(x)]_a^b = \varphi(b) - \varphi(a)$$

5.3 Teorema della media

Se $f(x)$ è una funzione continua in un intervallo $[a;b]$, esiste almeno un punto z dell'intervallo tale che:

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \cdot f(z) \qquad \text{con } z \in [a;b]$$

Quindi:

$$\frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a} = f(z)$$

Questo è il **valore medio** della funzione $f(x)$

5.4 Teorema fondamentale del calcolo integrale

Se una funzione $f(x)$ è continua in $[a;b]$, allora esiste la derivata della sua funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

per ogni punto x dell'intervallo $[a;b]$ ed è uguale a $f(x)$, cioè:

$$F'(x) = f(x)$$

ovvero $F(x)$ è una primitiva di $f(x)$.

5.5 Calcolo dell'area delimitata dai grafici di due funzioni

Siano $f(x)$ e $g(x)$ due funzioni continue definite nello stesso intervallo $[a;b]$, con $f(x) \geq g(x)$, per ogni $x \in [a;b]$, i cui grafici racchiudano una superficie; allora l'area S della superficie è data da:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

5.6 Calcolo del volume di un solido di rotazione

Dato il trapezoide esteso all'intervallo $[a; b]$, delimitato dal grafico della funzione $y = f(x)$ (positiva o nulla), dall'asse x e dalle rette $x = a$ e $x = b$, il **volume del solido di rotazione** che si ottiene ruotando il trapezoide intorno all'asse x di un giro completo è:

$$V = \pi \cdot \int_a^b f^2(x)\, dx$$

5.7 Calcolo del volume tramite medoto delle sezioni

Se di un solido conosciamo la funzione:

$$\text{area della sezione in } x = S(x)$$

è possibile calcolare il volume del solido utilizzando la formula:

$$V = \int_a^b S(x)\, dx$$

5.8 Integrale di f con un numero finito di discontinuità in $[a; b]$

Data una funzione $f(x)$ definità in un intervallo $[a; b] - d$ (dove d è punto di discontinuità):

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{k \to d^-} \int_a^k f(x)\, dx + \lim_{k \to d^+} \int_k^b f(x)\, dx$$

5.9 Integrale di f in un intervallo illimitato

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{k \to +\infty} \int_a^k f(x)\, dx$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx = \lim_{k \to -\infty} \int_k^a f(x)\, dx$$

6 Applicazioni degli integrali alla fisica

6.1 Posizione, velocità e accelerazione

In un moto rettilineo, in un istante t:

$$\begin{aligned} &s(t) && \text{posizione;} \\ &v(t) = s'(t) && \text{velocità;} \\ &a(t) = v'(t) = s''(t) && \text{accelerazione.} \end{aligned}$$

Pertanto, nota l'accelerazione in funzione del tempo t, per determianre la velocità e la legge del moto:

$$v(t) - v(t_0) = \int_{t_0}^{t} a(z)\,dz \quad \rightarrow \quad v(t) = v(t_0) + \int_{t_0}^{t} a(z)\,dz$$
$$s(t) - s(t_0) = \int_{t_0}^{t} v(z)\,dz \quad \rightarrow \quad s(t) = s(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(z)\,dz$$

6.2 Lavoro di una forza

Consideriamo una forza avente per direzione costante una retta r e intensità variabile al variare del punto di applicazione (come una molla). Indicando con x l'ascissa del punto di applicazione, $F(x)$ è l'intensità della forza.

Il lavoro della forza per lo spostamento del punto di applicazione può essere calcolato con:

$$L = \int_{a}^{b} F(x)\,dx$$

6.3 Quantità di carica

L'intensità di una corrente è la quantità di carica che attraversa la sezione di un conduttore in una unità di tempo. Per esprimere l'intensità istantanea nell'istante t si utilizza la derivata della funzione $q(t)$, che lega la quantità di carica al tempo:

$$i(t) = q'(t)$$

Se vogliamo determinare la quantità di carica che attraversa la sezione nell'intervallo di tempo da t_0 a t_1:

$$Q = \int_{t_0}^{t_1} i(t)\,dt$$